Matematyzowanie jako składowa kompetencji matematycznej

Gustaw Treliński

Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. J. Korczaka w Warszawie
gtrelinski@gmail.com

Streszczenie

Współcześnie, kompetencja matematyczna w postaci wiedzy, postaw oraz umiejętności musi być częścią kształcenia każdego człowieka; jest nieodzowna tym, którzy posługują się matematyką w kontekstach matematycznych oraz dla tych, którzy wykorzystują ją w sytuacjach pozamatematycznych. Ważną składową kompetencji matematycznej jest matematyzowanie.

Z matematyzacją mamy do czynienia (praktycznie) na każdych zajęciach szkolnych. Nie trzeba tej aktywności poświęcać odrębnych lekcji; wystarczy jedynie eksponować jej główne składowe w toku rozwiązywania zadań.

Artykuł charakteryzuje naturę matematyzacji jako umiejętności kluczowej w jej fazach: eksploracji sytuacji zadaniowej, sekwencji schematów oraz badania jej modelu. W każdej fazie są także eksponowane kierunki badań nad naturą matematyzacji oraz formami pracy z dziećmi w toku zajęć szkolnych.

1. Wstęp

Badania prowadzone w wielu krajach pokazują, że skuteczne kształcenie matematyczne nie polega na przekazywaniu uczniom wiedzy w postaci gotowej, którą mają sobie przyswoić, ale na organizowaniu sytuacji dydaktycznych, które umożliwią im konstruowanie w umyśle pojęć i schematów logiczno-matematycznych, które staną się fundamentem ich wiedzy (por. m.in. Stefan Turnau, 1990; Gustaw Treliński, 2011; Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, 2007; Zbigniew Semadeni i inni, 2015). Mówimy krótko, że sednem edukacji matematycznej jest rozwiązywanie zadań, że ważnym kryterium opanowania matematyki jest umiejętność ich rozwiązywania. Tak się dzieje na każdym etapie nauczania, niezależnie od treści matematyki szkolnej.

Z drugiej strony wiemy, że matematyka ma umożliwić skuteczne funkcjonowanie człowiekowi już po zakończeniu nauki w szkole. To zaś wiąże się z nabywaniem kompetencji[1] kluczowych dla procesu uczenia

[1]Kompetencja, czyli umiejętność wyższego rzędu będąca następstwem poznanej

się przez całe życie (zob. zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 18 grudnia 2006 r.; 2006/962/WE).

Wśród nich wskazuje się na kompetencję matematyczną. *Matematyczna kompetencja to zdolność rozumienia, osądzania, wykonywania i wykorzystywania matematycznych czynności w kontekście matematycznym i pozamatematycznym jako zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia, w różnorodnych sytuacjach. Koniecznym, ale z pewnością niewystarczającym, warunkiem wstępnym posiadania matematycznej kompetencji jest rozległa wiedza i techniczne umiejętności* (Mogens Niss, 2003: 218; tłum. Maria Legutko i Stefan Turnau).

Warto przy okazji podkreślić, że zacieranie różnicy między kompetencją a umiejętnością (ich zestawem) prowadzi nie tylko do błędnego rozumienia obu pojęć, ale przede wszystkim do wykoślawiania praktyki nauczania.

Niejednokrotnie w toku spotkań nauczycielskich akcentowano nierealność kształcenia kompetencji matematycznej z braku czasu na oddzielne zajęcia poświęcone tej kwestii, ze względu na duże braki merytoryczne uczniów „wynoszone" z poprzednich etapów edukacji, czy na brak nowoczesnych, interaktywnych narzędzi dydaktycznych. Jest również zaskakujące, iż w sprawozdaniach z badań szkolnych, w projektach planowania nauczania (a nawet podręcznikach temu poświęcanych) ukierunkowanych na kształtowanie kompetencji matematycznej[2] eksponuje się przede wszystkim wiedzę; brak zaś refleksji nad nią, wykorzystywania bogactwa matematycznych czynności (charakteryzowanych przez Nissa) w kontekście matematycznym i pozamatematycznym.

W toku dokładniejszej analizy Niss (2003: 218–219) charakteryzuje osiem składowych kompetencji matematycznej w tym analizowanie i budowanie modeli (modelowanie matematyczne). Ta składowa, m.in. obok analizowania podstaw i własności istniejących modeli, tłumaczenia i interpretowania modeli w modelowanej rzeczywistości obejmuje aktywne tworzenie modeli danych sytuacji – matematyzację.

wiedzy, nabytych umiejętności, doświadczeń i refleksji opartych na tym jak działać w określonych sytuacjach. Często, w publikacjach oraz w praktyce zaciera się różnicę między terminami *kompetencja* i *umiejętność* traktując je jako tożsame.

[2]Wiele takich projektów znajdujemy w Internecie, publikowanych nawet przez wydawnictwa naukowe.

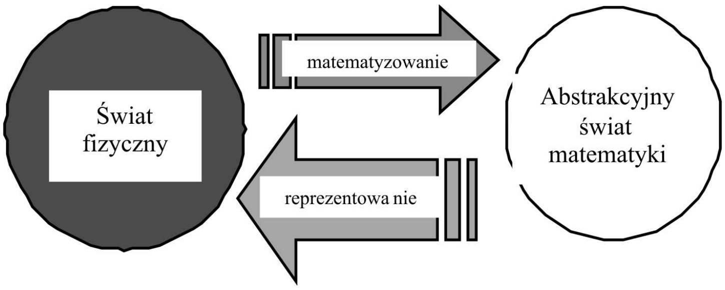
Matematyzowanie, to aktywność nie tylko ważna na poziomie szkolnym, ale coś specyficznego dla samej matematyki; to jedno z głównych zajęć matematyków (Hans Freudenthal, 1973). Poza edukacją matematyczną, nie ma odpowiedników w innych obszarach działalności ucznia. A. W. Bell (1979) podkreśla, że *zdolność do matematyzacji jest uniwersalną ludzką zdolnością podobną do zdolności mówienia lub przedstawiania rysunkiem.*

Sytuacje do kształcenia umiejętności matematyzowania i interpretowania skonstruowanych modeli pojawiają się na każdych zajęciach szkolnych, m.in. w toku rozwiązywania zadań. Każde szkolne zadanie matematyczne ma formę historyjki związanej z pewną sytuacją realną, abstrakcyjną, sformalizowaną lub tylko opisaną poglądowo. Należy ją zrozumieć, przeanalizować, przekształcić i badać środkami matematyki. Rozwiązywać takie zadania, to przechodzić od zadania – historyjki do zadania – modelu matematycznego, czyli zmatematyzować zadanie – historyjkę.

Matematyzowania powinniśmy uczyć od samego początku szkolnej edukacji matematycznej. Gdy matematyzacji nie ma w nauczaniu, wówczas rozkwita zdegenerowany formalizm. Warto zatem zastanowić się nad jej naturą oraz wskazać niektóre możliwości jej rozwijania.

2. Natura matematyzacji

Matematyka abstrakcyjna i konkretna rzeczywistość są dziedzinami rozłącznymi, ale wzajemnie wspomagają się. Relacje między obu światami: fizycznym i matematycznym, można poglądowo przedstawić tak (rys. 1):



Rys. 1
Źródło: Opracowanie własne

Opisując językiem matematyki daną *a priori* sytuację rzeczywistą, otrzymujemy uproszczony opis tej sytuacji, tzw. model matematyczny. Rozumowanie prowadzące do jego konstrukcji to **matematyzacja**.

W powszechnym obiegu funkcjonuje bardzo nośna charakterystyka matematyzacji jako *porządkowania rzeczywistości wtedy, gdy się odbywa za pomocą matematycznych środków* (Freudenthal, 1973: 44). W nauczaniu jest rozumiana, jako konstruowanie:

a) matematycznego schematu dla jakiegoś układu stosunków (abstrakcyjnych, realnych, wyobrażonych);

b) na wpół poglądowego schematu myślowego, który mógłby być następnie przetworzony na pełny schemat matematyczny (Zofia Krygowska, 1979, cz. 1: 48).

By te ogólne charakterystyki mogły stanowić bazę dla badań, planowania nauczania oraz tworzenia sytuacji dydaktycznych muszą być zoperacjonalizowane, z uwypukleniem sytuacji, w której działanie się dokonuje oraz odniesione do osobistej aktywności ucznia. Mówiąc o **matematyzacji** myślę *o niededukcyjnym rozumowaniu, które rozpoczyna się od badania pewnej sytuacji (realnej, wyobrażonej, abstrakcyjnej), dalej obejmuje czynności związane z wydzielaniem w tej sytuacji obiektów i związków między nimi oraz ich reprezentowanie w różny sposób i wreszcie opisywanie ich językiem matematyki.* Otrzymany opis, to schemat (model) matematyczny tej sytuacji.

W tym określeniu akcentuje się *punkt wyjścia, punkt dojścia* oraz *tok przejścia.* Ich układ składa się na aktywność matematyzowania, jedną z form aktywności matematycznej.

3. Matematyzacja w nauczaniu – praktyka i przesłanki

W każdej strategii nauczania realizowanej w ramach kursu danego przedmiotu mamy do czynienia z wieloma działaniami, których wpływu na jakość kształcenia nie zawsze jesteśmy świadomi. Łącznie one zakreślają ramy realizowanej – niezależnie od tego, czy chcemy, czy nie – strategii kształcenia matematycznego, wyznaczają „filozofię" wykładanego przedmiotu. One nadają osobisty wymiar interpretacjom materiału nauczania, zestawom umiejętności i sprawności, które uczeń ma nabyć.

W każdej koncepcji nauczania (tak postulowanej, jak i realizowanej) można wyróżnić:

a) elementy „jawne"; są one opisane w standardach nauczania, programach oraz podręcznikach. Obejmują one dobór pojęć i ich układ, nadawany im poziom ogólności, preferowane procedury operowania nimi, stosowane metody badania obiektów i sytuacji;
b) systemy działań „intuicyjnych" przejawiających się w konkretnej praktyce nauczania; obejmują one to, co określamy specyfiką dobieranych przykładów, poziom elementaryzacji i formalizacji treści, tworzone reguły postępowania (formalne, czynnościowe, typu algorytmicznego, heurystyczne itp.), drogi dochodzenia do rozwiązań zadań, formy zapisu rozumowań, a także stawiane wymagania i sposoby kontrolowania efektów nauczania – uczenia się itp.;
c) zespół elementów „ukrytych", o których nie wspomina się w żadnych dokumentach, choć dość silnie eksponuje w nauczaniu. Obejmują niejawnie preferowane: cele kształcenia, systemy kontroli i oceny, umiejętności uczniów oraz postępowanie dydaktyczne – jak uczę.

Praktyka przekonuje, że nauczyciele, m.in. ze względu na brak czasu i tego, czego jeszcze nie umieją czynić (często, bo nie mają takiej potrzeby) nie są skłonni do refleksji indywidualnej i grupowej – w odniesieniu do tych trzech systemów działań – nad przebytą drogą i koncepcją nauczania, krytycznego spojrzenia wstecz na tę drogę, badania, czy była najbardziej racjonalna, skuteczna.

Warto byłoby podjąć – w tym zakresie – dobrze zaplanowane **badania**, prowadzone metodą bezpośredniej obserwacji naturalnego procesu nauczania, ustalenia ich wzajemnych relacji, genezy i skutków działań danego typu. Aktualnie obserwacje tego rodzaju ograniczają się do wypreparowanych prostych sytuacji nie dających nawet przybliżonych odpowiedzi.

Aktywność matematyzowania powinna być „jawnym" elementem strategii nauczania, jako składowa kompetencji matematycznej oraz postulowany cel kształcenia ogólnego w szkole, wskazywany w podstawie programowej kształcenia matematycznego.

Musimy nadać odpowiednią rangę aktywności matematyzowania, ponieważ:

- uczeń ma rozumieć, co i dlaczego robi, w przeciwnym przypadku jej miejsce będzie zajmował zdegenerowany formalizm;

- zadania o treści praktycznej pojawiają się na każdych zajęciach, w sprawdzianach oraz w zestawach egzaminacyjnych;
- matematyzujemy matematykę, m.in. porządkujemy elementy teorii, ujawniamy jej strukturę oraz oceniamy skutki tych działań.

W ramach nauczania matematyki nie uczy się matematyzowania w sposób zamierzony. Źródeł tej praktyki trzeba szukać zarówno w funkcjonujących obyczajach szkolnych, jak i nieoznaczoności reguł, którymi można się kierować matematyzując jakąś sytuację.

W praktyce, rozwiązujemy liczne zadania, wprowadzamy pojęcia, hierarchizujemy je i żywimy nadzieję, że gromadzone doświadczenie wystarczy, aby uczeń nie miał wątpliwości, jak porządkować informacje, wydzielać obiekty, wiązać czynności konkretne z operacjami matematycznymi, jak racjonalnie dobierać pojęcia, działania, narzędzia, mimo zróżnicowania językowego, czynnościowego oraz bogactwa kontekstów pozamatematycznych. Może to wystarczy pewnej grupie uczniów, lecz jest mało racjonalne dydaktycznie dla znaczącej ich większości.

Umiejętność matematyzowania, choć „pomijana” w dokumentach, ma swoje miejsce – często niejawne – w systemie działań intuicyjnych nauczyciela. To ma konsekwencje dla nauczania. Z praktyki wiadomo, że negatywne aspekty takich działań mogą wypaczać rozumienie sensu edukacji matematycznej, powodując niechęć do przedmiotu rozważań.

Rozwijanie umiejętności matematyzowania, dla wielu uczących, jest poważnym wyzwaniem dydaktycznym. Tak się dzieje, ponieważ formułowane w literaturze zalecenia są bardzo ogólne i dlatego kłopotliwe w przetworzeniu przez nauczyciela w propozycje lekcyjne. Inne zaś, jako odnoszone do konkretnego przykładu, robią wrażenie ich lokalnej użyteczności.

Sugerowane kierunki badań

Warto podjąć bardziej szczegółowe badania w kierunku:

- wypracowania systemu zabiegów (wskazań dydaktycznych), którymi może kierować się nauczyciel wprowadzając uczniów w zagadnienia matematycznego ujmowania problemów rzeczywistych przy zgodności tego postępowania z zaleceniami psychologicznymi i matematycznymi; określić ich skuteczność, a także ustalić, jak te wskazania można ująć w ramy pewnego programu kształcenia (szkolenia), na określonym etapie nauczania (wymiar poziomy) oraz w kolejnych etapach (wymiar pionowy);

- ustalić poziom od jakiego uczeń jest dojrzały do samodzielnego podejmowania działań specyficznych dla matematyzowania sytuacji realnych;
- opracować przykładowe materiały dydaktyczne (zeszyty ćwiczeń, scenariusze zajęć) eksponujące aktywność matematyzowania.

4. Matematyzowanie jako umiejętność kluczowa

Matematyzowanie jako umiejętność kluczowa jest nieodzowną, aby radzić sobie w szkole, w życiu codziennym i pracy zawodowej. Jej nabywanie odbywa się praktycznie przez cały okres nauki szkolnej. Na każdym etapie kształcenia uczeń powinien opanować pewne jej aspekty, bazę dla dalszego jej rozwijania. To zaś wymaga zaplanowania i konsekwentnego stosowania pewnego „programu”, procedury szkolenia – systemu działań (zabiegów dydaktycznych, materiałów, zadań), który opisze oczekiwane zmiany w sposobie myślenia lub działania uczniów.

Ten dwuwymiarowy program kształcenia musi uwzględniać nabywanie:

a) umiejętności w zakresie trzech składowych matematyzowania: *punkt wyjścia, tok przejścia, punkt dojścia*;

b) umiejętności operacyjnych wraz z ustaleniem wskaźników umiejętności (oznak, „dowodów”), które umożliwią stwierdzenie, czy uczeń osiągnął oczekiwany rezultat.

4.1. Eksploracja sytuacji zadaniowej – *punkt wyjścia*

Punktem wyjścia w matematyce szkolnej jest pewna sytuacja zadaniowa. Taka sytuacja może mieć charakter teoretyczny, praktyczny, realistyczny (układ fenomenów). Może być zadana graficznie a także tylko opisana słownie.

Badanie sytuacji zadaniowej obejmuje system działań, w tym:

- wstępne zapoznanie się z sytuacją, odkrywanie regularności, wydzielanie założeń dodatkowych, upraszczających (strukturujących daną sytuację), a także hipotez o przypuszczalnych przyczynach i przebiegu procesów;

- wybór obiektów oraz zmiennych, określenie ich zakresów (np. opisujących procesy, tych, których wpływ jest niewielki).

Każde z tych działań powinno być elementem jawnej strategii nauczania.

Na poziomie podstawowym zaczniemy od uczenia (umiejętności operacyjne), przykładowo:

- analizowania sytuacji ze względu na niewiadome, ustalenia, czy w danej konkretnie sytuacji mamy nadmiar, niedobór lub tyle, ile potrzeba informacji, czy te informacje są wiarygodne, zbędne, niemożliwe, sprzeczne;
- kojarzenia zwrotów języka naturalnego z obiektami, liczbami, wielkościami, figurami oraz relacjami między nimi (z działaniami);
- wyrażania, opisywania (w różny sposób) związków między wielkościami.

Oto niektóre wskaźniki powyższych umiejętności:

- dać informację, wiadomość, poszukiwaną niewiadomą w sytuacji opisanej werbalnie, graficznie; ocenić, czy wskazana w danej sytuacji informacja jest potrzebna, poboczna;
- rozstrzygnąć, czy mamy nadmiar, niedobór, wystarczające informacje (dane), aby badać daną sytuację;
- rozstrzygnąć, czy informacja o związku między wielkościami w opisywanej sytuacji może być wyrażona za pomocą działania (np. systemu czynności, działania arytmetycznego);
- przedstawić za pomocą konkretów, rysunków, liczb i działań układ związków między wielkościami w danej sytuacji zadaniowej.

Popatrzmy, jakie trudności mają trzecioklasiści z kojarzeniem zwrotów języka z działaniami arytmetycznymi.

Przykład 1

a) Uczeń samodzielnie układa zadanie:

Janek i Kasia poszli do sklepu i kupili 4 ciastków
5 cukierków. Ile kupili razem?

b) Napisz działanie, którym posłużysz się, aby podać rozwiązanie tego zadania:

7 · 5 = 35 zł

Przykład 2

a) Uczeń samodzielnie układa zadanie:

Kasia kupiła 9 lizaków po 3 zł kupiła jeszcze 2 po 2 zł. Ile zapłacili razem?

b) Napisz działanie, którym posłużysz się, aby podać rozwiązanie tego zadania:

9 · 3 + 2 · 2 = 32 + 4 = 36

Naturalnie, w praktyce nauczania takie błędy pojawiają się niejednokrotnie. Jednak chodzi o to, aby nauczyciel:

1. miał świadomość tego, że ma systematycznie uczyć badania sytuacji wyjściowej;
2. w swojej filozofii nauczania miał „program" kształtowania umiejętności matematyzowania w strukturze: kompetencja kluczowa, umiejętności operacyjne, wskaźniki umiejętności.

Jak pisze Stefan Turnau (1990: 218): *jedynym skutecznym sposobem opanowania umiejętności racjonalnego doboru właściwego działania jest rozwiązywanie wielu zadań, zróżnicowanych pod względem językowym i pod względem kontekstu pozamatematycznego.* Ten postulat można rozszerzyć na kształtowanie innych umiejętności operacyjnych matematyzowania (kompetencji modelowania matematycznego).

Na temat sposobów analizy treści zadania mamy wiele publikacji. Nie zawsze jednak te sposoby obejmują pełną analizę opisywanej „historyjki" zadaniowej.

Rozważmy typowe zadanie.

> *Jacek kupił za* 48 *złotych* 6 *serii znaczków po* 4 *w każdej. Ułożył je w klaserze w trzech równych rzędach. Po ile znaczków jest w każdym rzędzie*?

W tej sytuacji przyjmujemy milcząco, że równość rzędów znaczków nie oznacza układania ich w sposób wyrównany, ale że w każdym rzędzie jest tyle samo znaczków, że nieważne kiedy to się dzieje, że układanie należy traktować matematycznie (a nie życiowo czy filatelistycznie), że żadnych faktów i zdarzeń poza wymienionymi nie należy brać pod uwagę. Dla dzieci z etapu nauczania wczesnoszkolnego nie jest to oczywiste.

Na etapie początkowym można myśleć o trzech formach analizy treści zadania, nazwijmy je odpowiednio enaktywną, obrazową i werbalną. W przypadku pierwszej z nich wiedzę o strukturze informacji w danej sytuacji zadaniowej uczeń zdobywa samodzielnie za pośrednictwem działań typu manualnego (czynności konkretnych) np.: *wybierz sobie zastępniki i zabaw się zgodnie z tym, o czym mowa w zadaniu.*

Mówiąc o formie obrazowej analizy treści zadania myślimy o takich czynnościach ucznia, które prowadzą do wytworzenia sobie „obrazowej" struktury danej sytuacji zadaniowej (czynności, które organizują przestrzeń jego spostrzeżeń i wyobrażeń), np.: *wykonaj rysunek* (*szkic*) *do zadania, uwzględnij w nim to, co jest ważne.*

Wybierając werbalną formę analizy treści zadania proponujemy, np. pokolorowanie w tekście zadania (jedną barwą) informacji ważnych, inną – pobocznych, zbędnych, czy wielkości poszukiwanej bądź, np. wypisanie określonych informacji, czy wymianę niektórych zwrotów (wyrazów) na inne bez zmiany sensu zadania.

W toku analizy (w każdej z tych form) nie chodzi o ustalenie za pomocą jakiego działania rozwiążemy zadanie, ale o pełne zinterioryzowanie się struktury informacji opisanej zadaniem.

Sugerowane kierunki badań

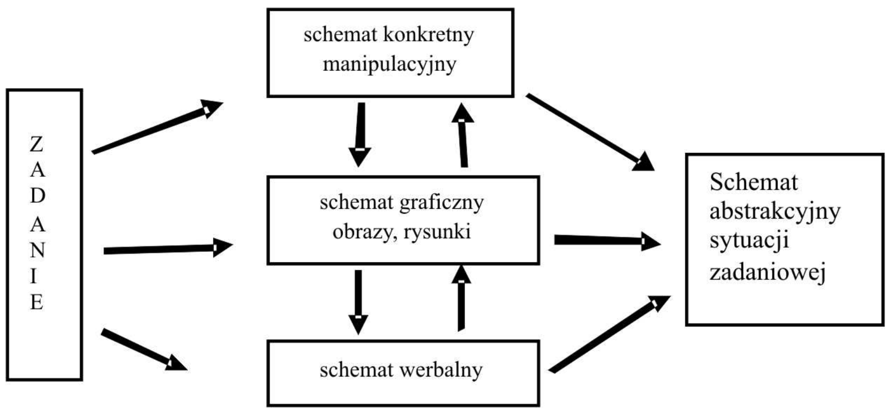
Warto podjąć bardziej szczegółowe badania w kierunku:

- ustalenia rzeczywistej efektywności każdej z form analizy zadania w różnorodnych sytuacjach zadaniowych, stwierdzenie, czy i w jakim stopniu jest to związane z syntaktyką zadania, strukturą informacji, kontekstem (realistyczny, matematyczny) itp.;
- wypracowania ram dydaktycznych dla kształtowania umiejętności analizowania treści zadań, które mogą pomóc nauczycielowi w planowaniu własnego nauczania – uczenia się na danym etapie kształcenia.

4.2. Sekwencja schematów reprezentacji

Dziecko rozwiązując zadanie, poznając jakieś pojęcie matematyczne wielokrotnie „przebywa drogę” od sytuacji zadaniowej (osadzonej w kontekście realnym bądź matematycznym) do jej modelu opisanego językiem matematyki, a także na odwrót – od modelu do sytuacji wyjściowej. „Przebywanie” tej drogi to nic innego jak tworzenie schematu konkretnego, ikonicznego, werbalnego lub symbolicznego sytuacji, obiektu bądź układu czynności. To konstruowanie schematu z pewnego punktu widzenia prostszego, a także z pewnych względów bardziej abstrakcyjnego w stosunku do *punktu wyjścia*.

Przechodzenie od sytuacji wyjściowej do schematu abstrakcyjnego może odbywać się wzdłuż pewnych „dróg” o zmiennym charakterze. Ilustruje je diagram (rys. 2).



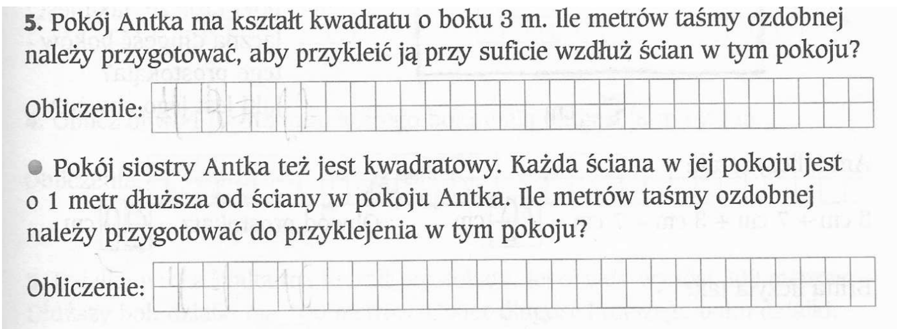
Rys. 2
Źródło: Opracowanie własne

Nie jest to „przechodzenie” w jednym kierunku, co wskazują strzałki. Czasem uczeń najpierw opowiada sobie o danej sytuacji i dopiero potem tworzy jej schemat manipulacyjny, który opisuje symbolicznie (system działań: zadanie – schemat werbalny – schemat manipulacyjny – schemat abstrakcyjny). Innym razem najpierw przedstawia sytuację rysunkiem i dopiero potem „wyraża” ją słowami i opisuje symbolicznie. Każdorazowo, w systemie działań ucznia przeplatają się elementy manipulacyjne, obrazowe i werbalne.

Powyższy diagram można traktować jako kanwę postępowania dydaktycznego dla wypracowania metodyki nabywania umiejętności matematyzowania sytuacji zadaniowych. Można z niego odczytać, jakie ćwiczenia, w jakiej kolejności rozwiązywać oraz jak je wiązać między sobą, aby proces tworzenia schematu abstrakcyjnego zadania przebiegał prawidłowo.

Nie bez znaczenia jest również spojrzenie, poprzez system działań opisanych tym diagramem, na pojawiające się błędy dydaktyczne i źródła niepowodzeń w kształtowaniu umiejętności matematyzowania sytuacji zadaniowych oraz w konsekwencji uczenia rozwiązywania zadań.

Oto dość typowe zadanie zaczerpnięte z podręcznika (zeszytu ćwiczeń) dla klasy trzeciej.



5. Pokój Antka ma kształt kwadratu o boku 3 m. Ile metrów taśmy ozdobnej należy przygotować, aby przykleić ją przy suficie wzdłuż ścian w tym pokoju?

Obliczenie:

● Pokój siostry Antka też jest kwadratowy. Każda ściana w jej pokoju jest o 1 metr dłuższa od ściany w pokoju Antka. Ile metrów taśmy ozdobnej należy przygotować do przyklejenia w tym pokoju?

Obliczenie:

Autor zadania proponuje od razu konstrukcję rozwiązania symbolicznego (działanie arytmetyczne) eliminując wiele czynności specyficznych dla matematyzacji tej sytuacji, m.in. tworzenie jej reprezentacji geometrycznej, czy przyjęcie założeń dodatkowych. Redukowanie całego toku rozumowania do napisania wyrażenia symbolicznego jest błędem dydaktycznym nie tylko w nauce poznawania początków geometrii, ale rugowaniem z procesu kształcenia umiejętności matematyzowania. Jak pisze Mirosław Dąbrowski (2008: 89): *Matematyzowanie to jedna z najważniejszych, ale i najtrudniejszych umiejętności matematycznych, rozwijanych w procesie kształcenia. (...) musimy dbać o to, żeby dziecko rozumiało, co i dlaczego robi.*

Na kolejnych etapach nauczania należałoby zwrócić uwagę na:

- badanie sytuacji, odkrywanie regularności, dyskutowanie wyboru zmiennych, przyjmowanie dodatkowych założeń dotyczących zmiennych oraz relacji między nimi;
- różnorodne reprezentacje sytuacji (modele), porównanie, zestawienie różnych reprezentacji, a także studium tych reprezentacji;
- w bardziej zaawansowanych etapach kształcenia na tworzenie schematu matematycznego, mającego postać aksjomatyki sytuacji.

Sugerowane kierunki badań

Warto podjąć bardziej szczegółowe badania w kierunku:

- ustalenia, w jakim zakresie rozwiązywanie zadań tekstowych drogą opisu sytuacji za pomocą pewnego obliczenia (konstruowanie rozwiązania symbolicznego z redukowaniem toku matematyzowania) stanowi „tamę" w nabywaniu umiejętności rozwiązywania zadań oraz sprzyja wyuczaniu bezradności matematycznej;
- szczegółowej charakterystyki każdej z „dróg" konstrukcji modelu symbolicznego sytuacji zadaniowej, wzajemnego ich wiązania oraz możliwości nabywania doświadczenia matematyzowania sytuacji na różnych poziomach edukacji matematycznej;
- wypracowania ram dydaktycznych dla planowania nauczania nakierowanego na kształtowanie kompetencji matematycznej.

5. Badanie modelu

W nauczaniu terminu model używa się w znaczeniu:

a) obiektu konkretyzującego jakiś obiekt abstrakcyjny, przedmiot będący kopią jakiegoś oryginału, np. model sześcianu;

b) schematu abstrakcyjnego opisującego ze względu na dane charakterystyki pewną sytuację.

W przypadku matematyzacji chodzi o to drugie znaczenie terminu.

Na etapie początkowym, z reguły szkolne zadania matematyczne są rozwiązywane „przez obliczenie"; matematyzacja sytuacji opisanej w zadaniu wymaga zastąpienia czynności lub stanu opisanego w zadaniu odpowiednim działaniem lub serią działań. *Punkt dojścia*, to schemat abstrakcyjny (działanie lub seria działań) tej sytuacji, inaczej jej model.

Rozważmy zadanie.

> *Radek stoi w sklepie przed półką z kosmetykami. Są tu pasty do zębów w cenie* 6 *zł oraz* 8 *zł. Szczotki do zębów w cenie* 3 *zł oraz pachnące mydełka w cenie* 2 *zł oraz* 4 *zł. Radek kupił droższą pastę oraz tańsze mydełko. Ile zapłacił*?

Zauważmy, że model (*punkt dojścia*) tej sytuacji ma formę wyrażenia $8 + 2 = 10$. Nie jest on dosłowną „reprezentacją" sytuacji, ale uwzględnia tylko niektóre własności i relacje między rozważanymi przedmiotami. Nie bierzemy pod uwagę pewnych przedmiotów, ich cen, a także, iż wszystko dzieje się w sklepie, że zakupy robi Radek, itp..

Należy wiedzieć, że:

- schemat (model) nie jest doskonałą reprezentacją sytuacji, którą usiłuje „naśladować"; nie można mówić o modelu sytuacji, procesu lub zjawiska bez wyraźnego wyszczególnienia założeń, warunków i ograniczeń, które przyjęliśmy konstruując go; tworząc go nauczyciel musi – na ten aspekt rozwiązywania zadania – zwracać uwagę;
- model jest tworem abstrakcyjnym, matematycznym (jest zanurzony w matematyce); jego badanie musi podlegać wszelkim kanonom metody matematycznej z rozmaitymi jej konsekwencjami.

W rozważaniach dydaktycznych musimy oddzielić przydatność modelu od jego adekwatności. Model uznajemy za wartościowy (przydatny), m.in., gdy czynniki, które wywierają istotny wpływ na badaną sytuację mają swoje odpowiedniki w modelu, w także model pozwala zrozumieć sytuację oraz formułować interesujące nas wnioski.

Mówimy, że dany model jest adekwatny do danej realnej sytuacji ze względu na wybrane charakterystyki, gdy prawidłowo jakościowo i ilościowo opisuje sytuację ze względu na te charakterystyki.

W rozważanej poprzednio sytuacji zadaniowej można utworzyć kilka modeli (schematów symbolicznych), jak np. $6 + 8 + 2 + 4 = 20$. Ten model nie jest ani adekwatny, ani przydatny dla podania odpowiedzi na pytanie.

W początkowej edukacji matematycznej mamy wiele sytuacji, w których działania ucznia sprowadzają się do wykonania samego dodawania, odejmowania itp. Czasem przyjmują one formę symboliczną, typu $3 + 6$, $6 - 3$, $3 \cdot 4$, bądź formę grafu lub drzewa. Okazuje się, że dla wielu dzieci liczby występujące w tych działaniach, oderwanych od kontekstu, nie mają dla żadnego konkretnego sensu (Dąbrowski, 2008: 90). Często starają się one liczbom i działaniu nadawać jakiś zrozumiały dla siebie sens. W tym musi im pomóc nauczyciel.

Dlatego, niezbędne na etapie *punkt dojścia* jest rozwiązywanie zadań, w których dzieci będą zmuszone tworzyć realistyczne zadania polegające na interpretowaniu symbolicznych zapisów, wyników obliczeń (mówiąc obrazowo zanurzyć dane wyrażenie w sytuacji konkretnej). *Nie marnujmy tych możliwości zbyt wcześnie zmuszając dzieci do operowania symbolami na każdym kroku* (Dąbrowski, 2008: 90).

Nabywanie umiejętności matematyzowania na etapie *punkt dojścia* powinno być ukierunkowane na:

a) odróżnianie sytuacji, którą się matematyzuje od jej schematu; kształtowanie świadomości, że schemat nie jest doskonałą reprezentacją sytuacji, ale uwzględnia tylko niektóre jej obiekty i relacje;
b) porównywanie różnych schematów danej sytuacji; wartościowe dydaktycznie jest konstruowanie różnych opisów wyjściowej sytuacji zadaniowej;
c) rozwiązywanie zadań, w których modele matematyczne sytuacji zadaniowych będą sprzyjać kształtowaniu intuicji geometrycznej oraz właściwych wyobrażeń o reprezentowanym przez siebie obiekcie;
d) badanie przydatności oraz adekwatności modelu, konfrontowanie schematu z sytuacją wyjściową (empiryczne, teoretyczne).

Sugerowane kierunki badań

Warto podjąć bardziej szczegółowe badania w kierunku:

- ustalenia, w jakim stopniu pomijanie *punku dojścia* w procedurze rozwiązywania zadań tekstowych drogą opisu sytuacji za pomocą pewnego obliczenia stanowi „tamę” w nabywaniu umiejętności matematyzowania oraz sprzyja wyuczaniu bezradności matematycznej.

6. Zakończenie

W szkole matematyka jest używana w inny sposób, niż poza nią. W szkole jest przedmiotem, którego trzeba się uczyć, poza nią jest środkiem do wykonywania zawodu i organizowania sobie codziennego życia.

Kompetencja w postaci wiedzy, umiejętności oraz refleksji i postaw wobec każdej sytuacji, ma fundamentalne znaczenie dla każdego obywatela społeczeństwa opartego na wiedzy i zdolnego do posługiwania się czynnościami matematycznymi w kontekście matematycznym i pozamatematycznym. Jedną ze składowych kompetencji matematycznej jest matematyzowanie; ona powinna być jawnie formułowania w programach kształcenia, a jej nabywanie musi być przedmiotem codziennej praktyki nauczyciela wg wypracowanej przez siebie procedury.

Należy mieć na uwadze, że matematyzowanie, to jedna z najważniejszych, ale i najtrudniejszych umiejętności matematycznych, rozwijanych w procesie kształcenia. Z matematyzacją mamy do czynienia (praktycznie) na każdej lekcji. Nie trzeba aktywności matematyzowania poświęcać odrębnych zajęć; wystarczy rozwiązywać każde zadanie osadzone w kontekście realistycznym eksponując *punkt wyjścia*, *tok przejścia* i *punkt dojścia* oraz nie zapominać o interpretowaniu w jakimś kontekście realnym zadań czysto symbolicznych.

Rozwiązując zadania praktyczne należy jawnie wskazywać założenia (upraszczające, dodatkowe), jakie przyjęto tworząc zadanie matematyczne na tle danej sytuacji, Każdorazowo należy odróżniać sytuację, którą się matematyzuje od jej schematu (modelu, wyrażenia, figury geometrycznej).

Dominująca w praktyce szkolnej procedura rozwiązywania zadań oparta na operacjach arytmetycznych nie tylko ogranicza szanse ucznia na inne sposoby rozwiązywania zadania, ale blokuje nabywanie umiejętności matematyzowania oraz stanowi znaczący krok w kierunku pielęgnowania zdenerwowanego formalizmu.

Edyta Gruszczyk-Kolczyńska (2007: 84–91) podkreśla, że aktywność matematyzowania, w tym działania typu manipulacyjnego, czynności związane z przedstawianiem rysunkiem oraz słownym opisywaniem sytuacji zadaniowej są dostępne dzieciom klas początkowych pod warunkiem, że są osadzone w ich doświadczeniu.

W pełni jest zasadny postulat Krygowskiej, że *Matematyzację doświadczeń i intuicji ucznia powinno się przeprowadzać możliwie wcześnie, możliwie radykalnie, możliwie od początku czysto z punktu widzenia matematyki, choć zawsze w sposób naturalny* (Krygowska, 1979: 79).

Literatura

B e l l A. W.: 1979. *The learning of proces aspects of mathematics*, Educational Studies in Mathematics 10(3), s. 361–387.

D ą b r o w s k i M.: 2008, *Pozwólmy dzieciom myśleć*, CKE, Warszawa.

F r e u d e n t h a l H.: 1973, *Mathematics as en Educational Task*, Dordrecht.

G r u s z c z y k–K o l c z y ń s k a E.: 2007, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa.

K r y g o w s k a Z.: 1979, *Zarys dydaktyki matematyki*, WSiP, Warszawa.

N i s s M.: 2003, *Quantitative Literacy and Mathematical Competencies*, w: Madison B. L., Steen L. A. (red.), *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy, s. 215—220.
http://www.maa.org/external_archive/QL/pgs215_220.pdf
(dostęp: 12.06.2016), tłum. Legutko M. i Turnau S.
https://vfire.ap.krakow.pl/kdm/MNiss.pdf (dostęp: 12.06.2016).

S e m a d e n i Z., G r u s z c z y k–K o l c z y ń s k a E., T r e l i ń s k i G., B u g a j s k a–J a s z c z o ł t B., C z a j k o w s k a M.: 2015, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, Kielce.

T r e l i ń s k i G.: 2011, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna.* 3xM: *Matematyka, Modelowanie, Metodyka*, Naukowe Wydawnictwo Piotrkowskie, Piotrków Trybunalski.

T r e l i ń s k i G.: 1982, *Stosowanie matematyki jako problem dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

T u r n a u S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Mathematization as a component of mathematical competence

Summary

Summary Today, mathematical competence in the form of knowledge, attitudes and skills should be part of the education of every person; it is indispensable to those who use mathematics in mathematical contexts, as well as for those who use it outside of mathematics. Thus, mathematizaton is an important component of mathematical competence.

We encounter mathematization in almost all school activities. There is no need to to dedicate separate lessons to this activity; you only need to display its main components in the course of solving problems.

The article is characterizing the nature of mathematizaton as a key skill in its phases: exploration of the situation problems, sequence diagrams and examining its model. In each phase there is an emphasis on the lines of research on the nature of mathematizaton as well as on forms of work with children in their course of studies.